Les Équations du Second Degré

Théorie, Méthodes et 120 Exercices Progressifs

Introduction aux Équations du Second Degré

Qu'est-ce qu'une équation du second degré ?

Une **équation du second degré** est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec } a \neq 0$$

- a, b, c sont les **coefficients** (réels)
- a est le **coefficient dominant** ($a \neq 0$)
- x est l'**inconnue**
- Les solutions sont appelées **racines** ou **zéros**

Exemples :

- $2x^2 - 3x + 1 = 0$ (équation complète)
- $x^2 - 4 = 0$ (équation incomplète)
- $3x^2 + 2x = 0$ (équation incomplète)

À quoi servent les équations du second degré ?

Les équations du second degré permettent de :

- Résoudre des problèmes de géométrie (aires, volumes)
- Modéliser des trajectoires paraboliques
- Résoudre des problèmes d'optimisation
- Étudier des phénomènes physiques
- Calculer des points d'intersection de courbes

Équations du Second Degré - Cours Complet

Partie 1 : Forme Canonique et Discriminant

Forme canonique d'un trinôme

Tout trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous forme **canonique** :

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x - \alpha)^2 - \Delta\right]$$

où :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$
$$\Delta = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}$$

Le discriminant

Le **discriminant** (noté ou delta) est défini par :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Le discriminant détermine le **nombre** et la **nature** des racines :

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
2 racines réelles	1 racine double	Aucune racine réelle
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Distinctes	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	2 racines complexes

Partie 2 : Formules des Racines

Formules de résolution

Selon le signe du discriminant :

Cas 1 : > 0 (Deux racines réelles distinctes)

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

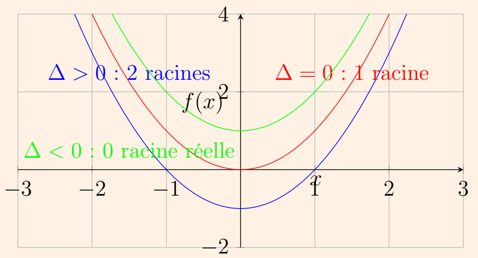
Cas 2 : $= 0$ (Une racine réelle double)

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$$

Cas 3 : < 0 (Deux racines complexes conjuguées)

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

Représentation graphique



Interprétation géométrique :

- Les racines sont les **points d'intersection** avec l'axe des abscisses
- $\Delta > 0$: la parabole coupe l'axe en 2 points
- $\Delta = 0$: la parabole est tangente à l'axe
- $\Delta < 0$: la parabole ne coupe pas l'axe

Partie 3 : Propriétés des Racines

Somme et produit des racines

Si x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$), alors :

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Démonstration :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Factorisation du trinôme

Selon le discriminant :

> 0 : Deux racines réelles distinctes

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$= 0$: Une racine réelle double

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

< 0 : Pas de factorisation réelle

Le trinôme ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Niveau Débutant (Exercices 1-40)

Exercices 1-15 : Identifier les coefficients

Pour chaque équation, identifier a, b, c et calculer :

1) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
2) $x^2 - 5x + 6 = 0$
3) $3x^2 + 2x - 5 = 0$
4) $-x^2 + 4x - 3 = 0$
5) $2x^2 + 7x + 3 = 0$
6) $x^2 - 9 = 0$
7) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
8) $x^2 + x + 1 = 0$
9) $5x^2 - 2x = 0$
10) $-2x^2 + 3x - 1 = 0$

Exercices 16-30 : Résolution directe

Résoudre les équations suivantes :

16) $x^2 - 4 = 0$
17) $x^2 - 9x + 20 = 0$
18) $2x^2 - 8x + 6 = 0$
19) $x^2 + 6x + 9 = 0$
20) $3x^2 - 12 = 0$
21) $x^2 - 5x = 0$
22) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
23) $x^2 + 2x + 5 = 0$
24) $2x^2 + 5x - 3 = 0$
25) $x^2 - 10x + 25 = 0$

Exercices 31-40 : Problèmes simples

31) Trouver deux nombres dont la somme est 10 et le produit est 21.
32) L'aire d'un rectangle est 35 m². Sa longueur est 2 m de plus que sa largeur. Quelles sont ses dimensions ?
33) Un carré a pour aire 64 cm². Calculer son côté.
34) La somme des carrés de deux nombres consécutifs est 145. Quels sont ces nombres ?
35) Un triangle rectangle a pour hypoténuse 13 cm. Un côté mesure 7 cm de moins que l'autre. Trouver les côtés.

Niveau Intermédiaire (Exercices 41-80)

Exercices 41-55 : Utilisation des formules somme/produit

41) Sachant que x_1 et x_2 sont les racines de $x^2 - 5x + 6 = 0$, calculer :
   (a) $x_1 + x_2$
   (b) $x_1 \cdot x_2$
   (c) $x_1^2 + x_2^2$
   (d) $x_1^3 + x_2^3$
   (e) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
42) Trouver une équation du second degré dont les racines sont 2 et -3.
43) Les racines de $2x^2 - 3x + 1 = 0$ sont x_1 et x_2. Calculer $(x_1 - x_2)^2$.
44) Déterminer m pour que l'équation $x^2 - mx + 9 = 0$ ait une racine double.
45) Trouver deux nombres dont la différence est 4 et le produit est 45.

Exercices 56-70 : Équations paramétriques

56) Pour quelles valeurs de m l'équation $(m-1)x^2+2x-1=0$ est-elle du second degré ?
57) Déterminer m pour que l'équation $x^2-2mx+m^2-1=0$ ait :
   (a) Deux racines distinctes
   (b) Une racine double
   (c) Aucune racine réelle
58) Soit l'équation $x^2-(m+2)x+m+1=0$. Montrer qu'elle admet une racine constante.
59) Pour quelles valeurs de k l'équation $kx^2-4x+1=0$ a-t-elle des racines réelles ?
60) Déterminer p pour que les racines de $x^2-px+12=0$ aient pour somme 7.

Exercices 71-80 : Factorisation et signe

71) Factoriser les trinômes suivants :
   (a) x^2-5x+6
   (b) $2x^2+3x-2$
   (c) $4x^2-12x+9$
   (d) x^2+x+1
72) Étudier le signe des trinômes :
   (a) x^2-3x+2
   (b) $-2x^2+5x-2$
   (c) x^2+4x+4
   (d) x^2-2x+3
73) Résoudre les inéquations :
   (a) $x^2-4x+3>0$
   (b) $2x^2-x-1\leq 0$
   (c) $x^2+2x+1\geq 0$

Niveau Avancé (Exercices 81-120)

Exercices 81-95 : Problèmes concrets

81) **Problème de géométrie :** Un terrain rectangulaire a un périmètre de 100 m et une aire de 600 m². Quelles sont ses dimensions ?
82) **Problème de physique :** La hauteur h (en mètres) d'un projectile est donnée par $h(t)=-5t^2+20t$. Après combien de temps retombe-t-il au sol ?
83) **Problème économique :** Le bénéfice B (en euros) d'une entreprise est donné par $B(x)=-2x^2+100x-800$, où x est le nombre d'articles produits. Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ?
84) **Problème d'optimisation :** Trouver deux nombres positifs dont la somme est 20 et dont la somme des carrés est minimale.
85) **Problème de mélange :** On mélange deux solutions salées. La première à 20% de sel, la seconde à 50% de sel. On veut obtenir 1 litre à 35% de sel. Quelles quantités faut-il mélanger ?

Exercices 96-110 : Systèmes et configurations complexes

96) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

97) Trouver les dimensions d'un rectangle dont la diagonale mesure 13 cm et l'aire 60 cm².

98) Un triangle a pour côtés x, $x + 1$ et $x + 2$. Pour quelle valeur de x est-il rectangle ?

99) Déterminer l'équation de la parabole passant par les points A(1,0), B(2,3), C(3,8).

100) Les racines de $x^2 - px + q = 0$ sont r et s. Exprimer p et q en fonction de r et s.

Exercices 111-120 : Défis mathématiques

111) Démontrer que si $a + b + c = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une racine égale à 1.

112) Trouver tous les triplets (a, b, c) tels que les équations $ax^2 + bx + c = 0$ et $cx^2 + bx + a = 0$ aient une racine commune.

113) Montrer que les racines de $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$ sont réelles.

114) Déterminer la condition pour que les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ soient en progression arithmétique.

115) Résoudre l'équation bicarrée : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Méthodes et Astuces

Méthode de résolution complète

1. **Identifier** les coefficients a, b, c
2. **Calculer** le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
3. **Analyser** le signe de :
   - Si $\Delta > 0$: 2 racines réelles distinctes
   - Si $\Delta = 0$: 1 racine réelle double
   - Si $\Delta < 0$: 2 racines complexes
4. **Calculer** les racines selon le cas
5. **Vérifier** les solutions
6. **Conclure** avec les solutions

Exemple détaillé : Résoudre $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = -2$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$$
$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{4} = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{4} = \frac{3 + 5}{4} = 2$$

Tableau récapitulatif

	Nombre de racines	Nature	Formules
> 0	2	Réelles distinctes	$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
$= 0$	1	Réelle double	$x_0 = -\frac{b}{2a}$
< 0	2	Complexes conjuguées	$x_{1,2} = \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Formules importantes à retenir

$$\text{Discriminant : } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{Somme des racines : } S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

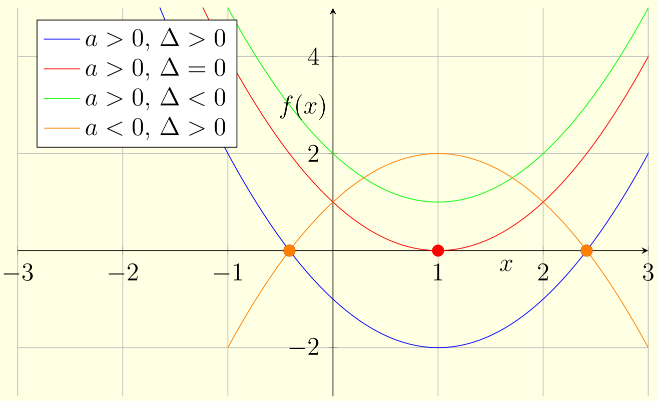
$$\text{Produit des racines : } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{Différence des racines : } |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\text{Forme canonique : } a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Représentations Graphiques

Comportement des paraboles



Observations :

- Si $a > 0$: la parabole est tournée vers le haut (convexe)
- Si $a < 0$: la parabole est tournée vers le bas (concave)
- Le sommet a pour abscisse $x_S = -\frac{b}{2a}$
- L'ordonnée du sommet est $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$

Tableau de Progression

Évaluation des compétences

Niveau	Compétences	Exercices	Objectif	Temps estimé
Débutant	Bases théoriques	1-40	90% de réussite	5-6 heures
Intermédiaire	Applications	41-80	85% de réussite	7-9 heures
Avancé	Problèmes complexes	81-110	80% de réussite	8-10 heures
Expert	Défis mathématiques	111-120	75% de réussite	4-5 heures

Conseils pour réussir

— **Apprendre** les formules par cœur (, somme, produit)
— **Toujours calculer** en premier
— **Vérifier** que $a \neq 0$
— **S'entraîner** avec des problèmes concrets
— **Ne pas oublier** les cas particuliers
— **Rédiger** soigneusement les calculs
— **Vérifier** les solutions en remplaçant
— **S'entraîner** régulièrement

Erreurs fréquentes à éviter

— Oublier que a doit être non nul
— Se tromper dans le signe de b
— Oublier la racine carrée dans les formules
— Confondre somme et produit des racines
— Négliger la vérification des solutions
— Oublier le cas $= 0$
— Mal interpréter < 0

Bon courage pour maîtriser les équations du second degré !
"La compréhension des équations du second degré ouvre la porte à l'étude des fonctions et à la modélisation mathématique."

La pratique régulière est la clé de la maîtrise !

Annexes : Fiches Mémo

Fiche 1 : Résolution étape par étape

Équation : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

1. **Calculer** : $\Delta = b^2 - 4ac$
2. **Analyser** :
   — Si $\Delta > 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
   — Si $\Delta = 0$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$
   — Si $\Delta < 0$: Pas de solution réelle
3. **Vérifier** : Remplacer x dans l'équation initiale
4. **Conclure** : Donner l'ensemble des solutions

Fiche 2 : Cas particuliers importants

— **Équation incomplète** $(b = 0)$: $ax^2 + c = 0$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad (\text{si } -\frac{c}{a} \geq 0)$$

— **Équation incomplète** $(c = 0)$: $ax^2 + bx = 0$

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}$$

— **Équation avec paramètre** : Vérifier d'abord que $a \neq 0$

— **Racines évidentes** : Tester $x = -1, 0, 1, 2$